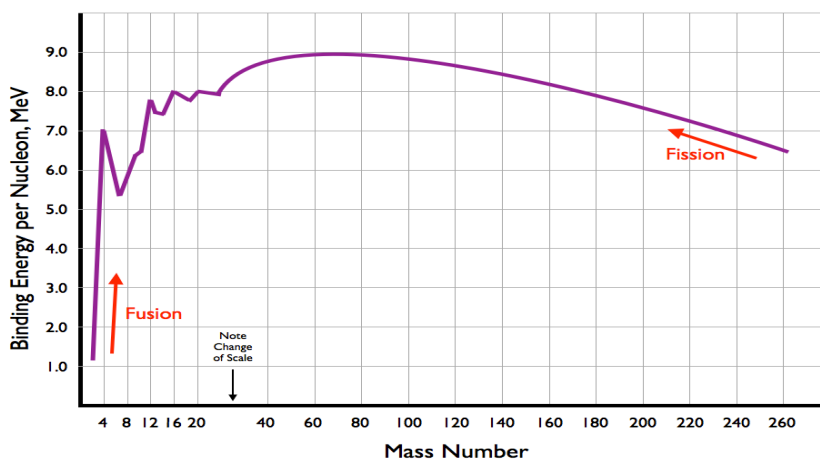


Διάλεξη 3: Ενέργεια σύνδεσης και πυρηνικά πρότυπα

Ενέργεια σύνδεσης

Η συνολική **μάζα ενός σταθερού πυρήνα είναι πάντοτε μικρότερη από αυτή των συστατικών του**. Ως παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε έναν πυρήνα (^{16}O) ο οποίος αποτελείται από 8 νετρόνια και 8 πρωτόνια. Η μάζα του βρίσκεται να είναι μικρότερη από αυτή του αθροίσματος της μάζας 8 πρωτονίων και αυτής των 8 νετρονίων μαζί. Αυτό συμβαίνει διότι μέρος της μάζας ή αλλιώς της ενέργειας “ξοδεύεται” σε **ενέργεια σύνδεσης των νουκλεονίων** που δημιουργούν τη δέσμη κατάσταση. Αυτό το έλλειμμα μάζας αντιστοιχεί στην πραγματικότητα στην έννοια την **Πυρηνικής Ενέργειας**.



Σχήμα 1: Ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο ως συνάρτηση του μαζικού αριθμού.

Σε ένα τυπικό γράφημα της ενέργειας σύνδεσης ανά νουκλεόνιο συναρτήσεως του μαζικού αριθμού των πυρήνων βλέπουμε ότι **η μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης παρουσιάζει η περιοχή γύρω από τον σίδηρο** (μαζικός αριθμός ~60) ενώ δεξιά και αριστερά βλέπουμε ότι η ενέργεια σύνδεσης μειώνεται. Μάλιστα στις πολύ μικρές μάζες πυρήνων έχουμε σημαντικά μικρότερη ενέργεια σύνδεσης. Αυτό σημαίνει ότι αν δύο ελαφροί πυρήνες ενωθούν για να δημιουργηθεί ένας πυρήνας με μαζικό αριθμό μικρότερο του 50 τότε ο πυρήνας που παράγεται έχει μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο και επομένως μικρότερη μάζα. Αυτή ακριβώς η διαφορά μάζας μεταξύ των αρχικών πυρήνων και του τελικού πυρήνα είναι και η ενέργεια που απελευθερώνεται στις **αντιδράσεις σύντηξης** όπως αυτές που συμβαίνουν στον ήλιο μας αλλά και σε κάθε άλλο αστέρι του σύμπαντος. Φυσικά ανάλογα με την ηλικία και το μέγεθος του αστεριού η αλληλουχία των πυρηνικών αντιδράσεων μπορεί να διαφέρει αλλά ο βασικός μηχανισμός είναι ο ίδιος και πρόκειται πάντα για αντιδράσεις πυρηνικής σύντηξης. Αυτός λοιπόν είναι και **ο μηχανισμός παραγωγής ενέργειας στα άστρα** και ίσως ένας από τους μελλοντικούς μηχανισμούς να παράγουμε ενέργεια και εμείς (μετά το έτος 2050!). Σήμερα υπάρχουν σημαντικοί τεχνικοί λόγοι που κάνουν την εκμετάλλευση της ενέργειας από την πυρηνική σύντηξη αρκετά δύσκολη.

Όσον αφορά στη **πυρηνική σχάση** – που είναι η ακριβώς αντίθετη διαδικασία – ένας πολύ βαρύς πυρήνας μπορεί να διαιρεθεί σε δύο μικρότερους πυρήνες και ορισμένα νετρόνια με αποτέλεσμα πάλι η συνολική μάζα μετά την σχάση να είναι μικρότερη της

αρχικής. Αυτό το έλλειμμα μάζας αποτελεί και την παραγόμενη πυρηνική ενέργεια που σήμερα την εκμεταλλευόμαστε για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.

Κατά το υπολογισμό της ενέργειας σύνδεσης θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στις μάζες που χρησιμοποιούμε. Συνήθως τα δεδομένα των μαζών μας δίνονται σε μονάδες ατομικών μαζών.

Η ίδια η ύπαρξη των πυρήνων οφείλεται στην ισχυρή αλληλεπίδραση. Πρόκειται για την ισχυρότερη μορφή αλληλεπίδρασης της φύσης (~100 φορές ισχυρότερη της H/M) η οποία είναι ελκτική. Αν δεν υπήρχε η ισχυρή αλληλεπίδραση μεταξύ των νουκλεονίων λόγω της άπωσης Coulomb δεν θα υπήρχαν και δέσμιες πυρηνικές καταστάσεις. Η **ισχυρή αλληλεπίδραση δεν γίνεται αισθητή στην καθημερινή μας ζωή λόγω της μικρής εμβέλειας που παρουσιάζει η οποία δεν ξεπερνά τα 2.5 – 3 fm**. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό της ισχυρής αλληλεπίδρασης είναι ότι αυτή είναι σχεδόν η ίδια για όλα τα νουκλεόνια. Δηλαδή η ισχυρή αλληλεπίδραση n-n, n-p και p-p δεν διαφέρει (τουλάχιστον σε πρώτη προσέγγιση). Για τον λόγο αυτό μάλιστα έχει εισαχθεί η έννοια του **ισοσπίν όπου τα πρωτόνια έχουν “άνω” ισοσπίν και τα νετρόνια “κάτω” ισοσπίν**. Σε πολύ μικρές αποστάσεις η ισχυρή αλληλεπίδραση γίνεται απωστική, ενώ λόγω της μικρής εμβέλειας της, σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ δύο πυρηνικών συστημάτων κυριαρχεί η δύναμη Coulomb. Έτσι προκειμένου να φέρουμε δύο πυρήνες κοντά για να μελετήσουμε την αλληλεπίδραση τους απαιτούνται μεγάλες ενέργειες σωματιδίων. Αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποιούνται σήμερα μεγάλες επιταχυντικές διατάξεις προκειμένου να μελετηθεί η δυναμική των πυρηνικών αντιδράσεων και της πυρηνικής δομής.

Πυρηνικά μοντέλα – Πρότυπο της υγρής σταγόνας

Ένα από τα βασικότερα μοντέλα που εξηγεί την πυρηνική ενέργεια σύνδεσης είναι αυτό της υγρής σταγόνας. Ονομάζεται έτσι διότι σε μεγάλο βαθμό τα νουκλεόνια μεταχειρίζονται στα πλαίσια του μοντέλου αυτού ως μόρια μιας σταγόνας νερού. Η ενέργεια σύνδεσης περιγράφεται με αρκετά μεγάλη ακρίβεια μέσω του μοντέλου της υγρής σταγόνας μέσω μιας σειράς όρων:

α) Η **ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο είναι σταθερή** και περίπου ίση με 8 MeV. Επομένως θα πρέπει η ενέργεια σύνδεσης να είναι ανάλογη του μαζικού αριθμού.

$$C_1 \cdot A$$

β) Τα νουκλεόνια που βρίσκονται στην **επιφάνεια έχουν λιγότερους γείτονες** με αποτέλεσμα να υφίστανται - για αυτό ακριβώς τον λόγο - μια μειωμένη σχετικά ενέργεια σύνδεσης η οποία θα πρέπει συνολικά να είναι ανάλογη της επιφάνειας (~r²).

$$-C_2 \cdot A^{2/3}$$

γ) Στον υπολογισμό της ενέργειας σύνδεσης θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η **αλληλεπίδραση Coulomb**. Η οποία είναι για ένα ζεύγος πρωτονίων ίση με

$$-k \cdot \frac{e^2}{r}$$

και δεδομένου ότι έχουμε **συνολικά Z(Z-1) ζεύγη**, τότε ο όρος που περιγράφει την μείωση της ενέργειας σύνδεσης λόγω της άπωσης Coulomb θα πρέπει να είναι ίσος

$$-C_3 \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

Πέραν των παραπάνω βασικών όρων που περιγράφουν την ενέργεια σύνδεσης υπάρχουν και δύο επιπλέον όροι οι οποίοι βελτιώνουν την απόδοση του μοντέλου στην περιγραφή των πυρηνικών μαζών.

δ) Ένας επιπλέον όρος είναι ο όρος της **ενέργειας ασυμμετρίας** ο οποίος εκφράζει το γεγονός ότι οι πυρήνες για τους οποίους ισχύει $N=Z$ είναι περισσότερο ισχυροί από τους υπόλοιπους. **Αυτός ο όρος βέβαια θα πρέπει να εξασθενεί για μεγάλες μάζες** όπου η ύπαρξη των επιπλέον νετρονίων είναι απαραίτητη προκειμένου να αντισταθμιστεί η άπωση Coulomb.

$$-C_4 \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

ε) Ο τελευταίος όρος είναι αυτός που αποδίδει την επιπλέον ενέργεια σύνδεσης που παρουσιάζουν οι πυρήνες με Z άρτιο και N άρτιο και αντίστοιχα την μείωση στην ενέργεια σύνδεσης για Z περιττό και N περιττό. Αυτός ο όρος είναι θετικός για Z άρτιο και N άρτιο, είναι ίσος με 0 για A περιττό, και είναι αρνητικός για Z περιττό και N περιττό

$$0, (\pm 1) C_5 \cdot \frac{1}{A^{3/4}}$$

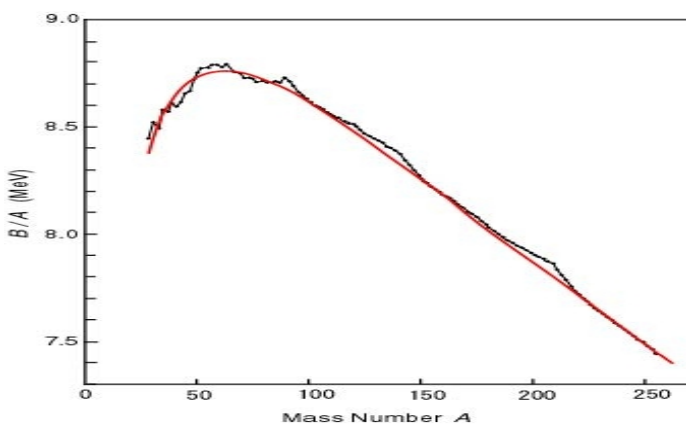
Λαμβάνοντας όλους του παραπάνω όρους υπόψη η ενέργεια σύνδεσης μπορεί να γραφεί:

$$Eb = C_1 \cdot A - C_2 \cdot A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

$$\text{όπου } \delta = 0, (\pm 1) C_5 \cdot \frac{1}{A^{3/4}}$$

Τα πειραματικά δεδομένα των ενεργειών σύνδεσης αποδίδονται καλύτερα για τους εξής συντελεστές:

$C_1=15.7$ MeV, $C_2=17.8$ MeV, $C_3=0.71$ MeV, $C_4=23.6$ MeV, $C_5=34$ MeV



Σχήμα 2: Ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο ως συνάρτηση του μαζικού αριθμού. Με το κόκκινο χρώμα παρουσιάζεται ο υπολογισμός σύμφωνα με το πρότυπο της υγρής σταγόνας.

Παράδειγμα:

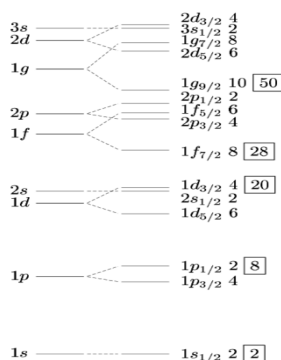
Υπολογισμός της ενέργειας σύνδεσης ^{16}O δεδομένου ότι η μάζα του είναι 15.9949146 u ($m_p=1.00782503 \text{ u}$, $m_n=1.0086649 \text{ u}$)

$$E_b = 8m_p + 8m_n - m(^{16}\text{O}) = (8 \cdot 1.00782503 \text{ u} + 8 \cdot 1.0086649 \text{ u} - 15.9949146 \text{ u}) \cdot 931.5 \text{ MeV/u}$$

$$E_b = 127.62 \text{ MeV} \Rightarrow E_b/A = 7.976 \text{ MeV}$$

Πυρηνικά μοντέλα – Μοντέλο ανεξάρτητων σωματιδίων

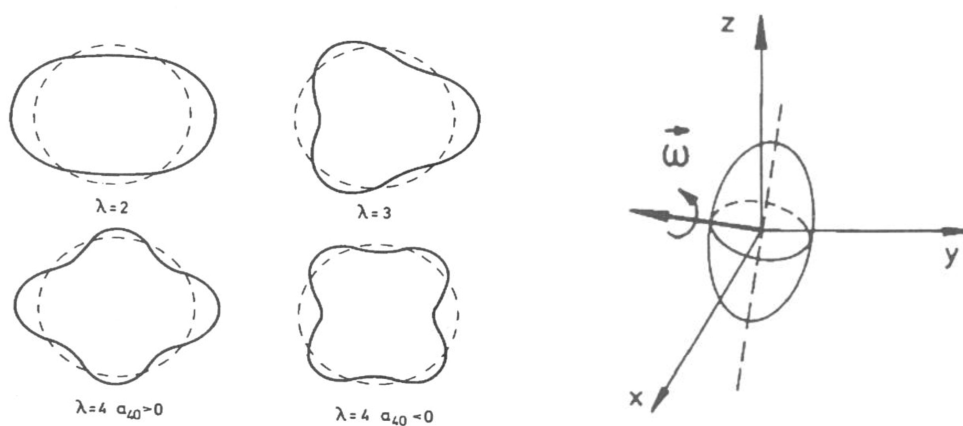
Το μοντέλο της υγρής σταγόνας περιγράφει με αρκετή ακρίβεια την μεταβολή της ενέργειας σύνδεσης των πυρήνων συναρτήσει του ατομικού και του μαζικού αριθμού αλλά δεν αποδίδει τις επιμέρους διακυμάνσεις της ενέργειας σύνδεσης καθώς επίσης δεν μπορεί να εξηγήσει πολλές από τις ιδιότητες των πυρήνων. Ένα άλλο μοντέλο που με επιτυχία περιγράφει πολλά από τα χαρακτηριστικά των πυρήνων ιδιαίτερα αυτών της στροφορμής και των μαγνητικών ιδιοτήτων του πυρήνα είναι το **μοντέλο των φλοιών** ή αλλιώς το μοντέλο των ανεξάρτητων σωματιδίων. Σε αυτό το μοντέλο τα νουκλεόνια καταλαμβάνουν συγκεκριμένες κβαντικές καταστάσεις και ως φερμιόνια που είναι υπακούουν την **απαγορευτική αρχή του Pauli** σύμφωνα με την οποία δύο νουκλεόνια με το ίδιο σπιν δεν μπορούν να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση. Το μοντέλο των φλοιών παρουσιάζει εξαιρετική επιτυχία σε πολλούς τομείς. Πρώτα από **όλα αναπαράγονται οι μαγικοί αριθμοί** που έχουν παρατηρηθεί από σειρές πειραμάτων. Δεύτερον **εξηγείται** με πολύ φυσικό τρόπο (από την απαγορευτική αρχή του Pauli) η **αυξημένη σταθερότητα των άρτιων (Z) – άρτιων (N) πυρήνων** αλλά και προβλέπονται με ιδιαίτερη επιτυχία η στροφορμή και οι μαγνητικές ιδιότητες των πυρήνων και ιδιαιτέρως αυτών που βρίσκονται κοντά σε κλειστούς φλοιούς. Για παράδειγμα το σπιν του ^{17}O ($p+^{16}\text{O}$ -διπλά μαγικός πυρήνας) είναι $5/2+$ όπως ακριβώς προβλέπεται από το πρότυπο των φλοιών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι στάθμες των πρωτονίων είναι κατά ένα μικρό ποσοστό σε μεγαλύτερες ενέργειες από αυτές των νετρονίων λόγω της αλληλεπίδρασης Coulomb. Έτσι εξηγείται και με έναν απόλυτα κβαντομηχανικό τρόπο η ασυμμετρία μεταξύ του αριθμού των πρωτονίων και του αριθμού των νετρονίων για τους βαρείς πυρήνες.



Σχήμα 3: Ενεργειακά επίπεδα σύμφωνα με το πρότυπο των φλοιών.

Πυρηνικά μοντέλα – Συλλογικό Μοντέλο

Στον αντίποδα του μοντέλου των ανεξάρτητων σωματιδίων βρίσκεται το συλλογικό μοντέλο. Μεταξύ των κλειστών φλοιών οι παραμένουσες αλληλεπιδράσεις των νουκλεονίων καθίστανται ισχυρές και το μοντέλο των φλοιών χάνει την ισχύ του καθώς συλλογικοί τρόποι περιγραφής του πυρηνικού συστήματος γίνονται περισσότερο σημαντικοί. Για παράδειγμα ένας πυρήνας μπορεί να παρουσιάζει διάφορες διεγερμένες καταστάσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τρόπους **δονήσεων**. Η ένας παραμορφωμένος πυρήνας μπορεί να περιστρέφεται και να παρουσιάζει ένα τυπικό φάσμα **διεγερμένων καταστάσεων εκ περιστροφής**. Έτσι έχουμε τυπικές ενεργειακές καταστάσεις εκ περιστροφής όπως επίσης και καταστάσεις δονήσεων του πυρήνα.



Σχήμα 4: Απεικόνιση καταστάσεων δόνησης και περιστροφής ενός πυρήνα.

Παράδειγματα:

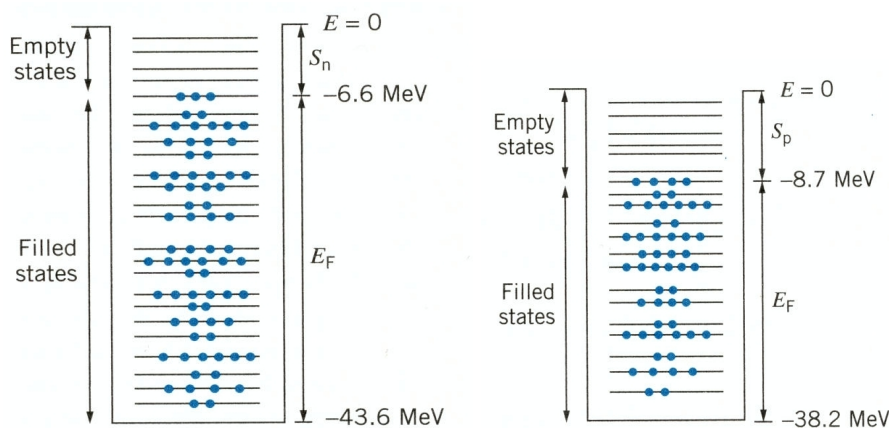
1) Να προβλεφθεί η στροφορμή του ^{41}Ca

Περιέχει 20 πρωτόνια και 20 νετρόνια +1 νετρόνιο.

Επειδή και οι αριθμοί αφορούν μαγικούς αριθμούς το πρότυπο των φλοιών αναμένεται να ισχύει οπότε περιμένουμε σπιν $J^\pi=7/2^-$

2) Προσεγγιστικός προσδιορισμός των κβαντικών καταστάσεων ενός πυρήνα (^{125}Te).

Ποιες είναι, έστω κατά προσέγγιση, οι ιδιότητες του πυρηνικού δυναμικού που “βλέπουν” τα νουκλεόνια εντός του πυρήνα;



Σχήμα 4: Το φρέαρ δυναμικού για τα 73 νετρόνια (αριστερά) και τα 52 πρωτόνια του ^{125}Te .

Αρχικά θεωρούμε δύο διαφορετικά “πηγάδια” δυναμικού: ένα για τα νετρόνια και ένα για τα πρωτόνια. Στόχος μας είναι να βρούμε το βάθος του δυναμικού για την κάθε περίπτωση.

Φυσικά, η ακριβής επίλυση του προβλήματος αυτού ξεπερνά του στόχους του μαθήματος, αλλά όμως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια ποιοτικά επιχειρήματα προκειμένου να προσδιορίσουμε το βάθος του πυρηνικού δυναμικού φρέατος.

Ας εστιάσουμε στην περίπτωση των νετρονίων. Θεωρώντας ότι τα νετρόνια καταλαμβάνουν διάφορες ενεργειακές στάθμες από $-U_0$ μέχρι κάποια ενέργεια εντός ενός πηγαδιού δυναμικού. Η ενέργεια αυτή δεν μπορεί να είναι $E=0$ διότι για να αφαιρέσουμε ένα νετρόνιο από έναν πυρήνα πρέπει να καταβάλουμε κάποια ενέργεια.

Αυτή είναι η **ενέργεια διαχωρισμού νετρονίου**:

$$S_n = m(^{124}\text{Te}) + m(n) - m(^{125}\text{Te}) = (123.902818u + 1.008665u - 124.904431u) \cdot 931.5 \text{ MeV}/u \Rightarrow S_n = 6.569 \text{ MeV}$$

Επομένως η “άνωτερη” κατειλημμένη στάθμη είναι περίπου 6.6 MeV κάτω από το επίπεδο $E=0$ του φρέατος δυναμικού που θεωρήσαμε.

Ο επόμενος στόχος τώρα είναι να βρούμε μέχρι που εκτείνεται το πηγάδι δυναμικού. Για τον λόγο αυτό θα θεωρήσουμε ότι η περιοχή του πυρήνα περιέχει ένα αέριο φερμιονίων (πρωτόνια και νετρόνια) και θα υπολογίσουμε την ενέργεια Fermi για την κάθε περίπτωση. Έτσι για τα νετρόνια έχουμε:

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \Rightarrow$$

$$E_F = \frac{(2\pi\hbar c)^2}{2m c^2} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \text{ όπου } V = \frac{4}{3}\pi (r_0 A^{1/3})^3 \Rightarrow$$

$$E_F = \frac{(2\pi \cdot 197 \text{ MeV fm})^2}{2 \cdot 939.6 \text{ MeV}^2} \left(\frac{3 \cdot 73}{8 \cdot \pi \cdot 905 \text{ fm}^3} \right)^{2/3} \Rightarrow E_F = 37 \text{ MeV}$$

Επομένως για τα νετρόνια το βάθος του φρέατος δυναμικού είναι περίπου :

$$U_0 = -37 \text{ MeV} - 6.6 \text{ MeV} = -43.6 \text{ MeV}.$$

Όπως εικονίζεται στο σχήμα 4. Ομοίως, μπορείτε να προσδιορίσετε το ύψος του φρέατος δυναμικού για τα πρωτόνια.