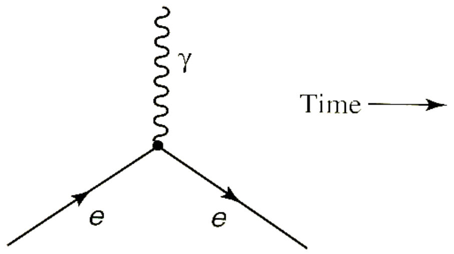
Διάλεξη 19: Διαγράμματα Feynman:

Αλληλεπίδραση	Ισχύς	Εμβέλεια	Φορέας
Ισχυρή	1	~fm	g-γλουόνιο
Η/Μ	10^{-2}	$1/r^2$	γ-φωτόνιο
Ασθενής	10^{-9}	~fm	$W^{\pm}$,Z μποζόνια
Βαρυτική	10^{-38}	$1/r^2$	Γκραβιτόνιο

Είδαμε προηγουμένως ότι για το κάθε είδος αλληλεπίδρασης υπάρχει και ο αντίστοιχος φορέας. Ένας πολύ όμορφος τρόπος αναπαράστασης των αλληλεπιδράσεων που διευκολύνει ιδιαίτερα την θεωρητική μελέτη των παρατηρούμενων αποδιεγέρσεων και αντιδράσεων είναι αυτός των διαγραμμάτων Feynman. Γύρω από τα διαγράμματα Feynman υπάρχει ολόκληρο κεφάλαιο με κανόνες και μεθόδους υπολογισμού το οποίο όμως είναι αρκετά προχωρημένο για τους σκοπούς του συγκεκριμένου μαθήματος. Προς το παρόν θα γίνει μια απλή αναφορά στα διαγράμματα Feynman με στόχο περισσότερο την εξαγωγή ποιοτικών παρά ποσοτικών συμπερασμάτων.

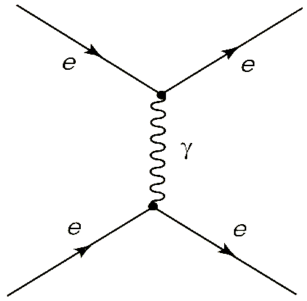
Η απλούστερη αλλά και η πλέον μελετημένη και γνωστή αλληλεπίδραση από όλες είναι η Η/Μ αλληλεπίδραση όπου τόσο στην κλασική της έκδοση όσο και στην κβαντομηχανική της μορφή αποτελεί μια ολοκληρωμένη και άρτια θεωρία. Για τον λόγο αυτό είναι σκόπιμο να ξεκινήσει κανείς να εξοικειώνεται με τα διαγράμματα Feynman από αυτή την θεωρία.



Σχήμα 1: Ο κόμβος της η/μ αλληλεπίδρασης των διαγραμμάτων Feynman.

Στα διαγράμματα Feynman **τα σωματίδια συμβολίζονται με ευθείες γραμμές ενώ οι φορείς με κυματιστές ή ελικοειδείς ή "ζικ-ζακ" γραμμές**. **Το είδος της γραμμής είναι χαρακτηριστικό για τον κάθε φορέα αλληλεπίδρασης** και επομένως για το κάθε είδος αλληλεπίδρασης. **Το σημείο αλληλεπίδρασης αντιστοιχεί σε έναν κόμβο**.
Στο πιο πάνω σχήμα ένα ηλεκτρόνιο λοιπόν απορροφά/εκπέμπει ένα φωτόνιο. Αυτή είναι και η στοιχειώδης αλλά και **η μόνη μορφή κόμβου που παριστάνει την Η/Μ αλληλεπίδραση**. (Προσοχή! από μόνη της μια τέτοια αλληλεπίδραση είναι αδύνατη διότι στο σύστημα κέντρου μάζας του ηλεκτρονίου η διαθέσιμη ενέργεια είναι mc^2. Αν συνέβαινε e -> e+γ τότε στο σύστημα κέντρου μάζας θα έπρεπε να έχουμε την ενέργεια του φωτονίου συν την ενέργεια ανάκρουσης του ηλεκτρονίου επιπλέον την αρχικής)

ενέργειας mc^2).

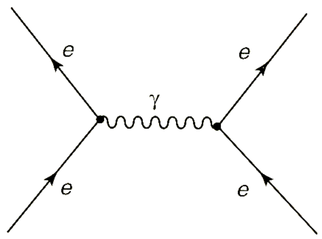


Σχήμα 2: Αναπαράσταση σκέδασης 2 ηλεκτρονίων. Στην κβαντική ηλεκτροδυναμική η σκέδαση αυτή απεικονίζει την άπωση των δύο ηλεκτρονίων και λέγεται σκέδαση Moller.

Ένα πρώτο παράδειγμα αναπαράστασης μιας πραγματικής αλληλεπίδρασης μέσω διαγραμμάτων Feynman είναι η πιο πάνω που παριστάνει την σκέδαση δύο ηλεκτρονίων:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

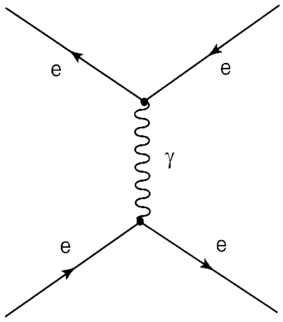
όπου δύο ηλεκτρόνια εισέρχονται, ανταλλάσσουν ένα φωτόνιο και εξέρχονται. Αυτού του τύπου η διαδικασία ονομάζεται σκέδαση Moller.
Ένας επιπλέον κανόνας για τα διαγράμματα Feynman είναι ότι μπορεί κανείς να τα περιστρέψει προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι περιγράφουν την ίδια φυσική διαδικασία αλλά είναι απλώς κάτι που επιτρέπεται. Έτσι για παράδειγμα αν το προηγούμενο διάγραμμα Feynman το περιστρέψουμε κατά 90 μοίρες με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού παίρνουμε το πιο κάτω διάγραμμα.



Σχήμα 3: Ένας τρόπος αναπαράστασης μέσω διαγραμμάτων Feynman της εξαΰλωσης ενός ηλεκτρονίου και ενός ποζιτρονίου για να σχηματιστεί στην τελική κατάσταση πάλι ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.

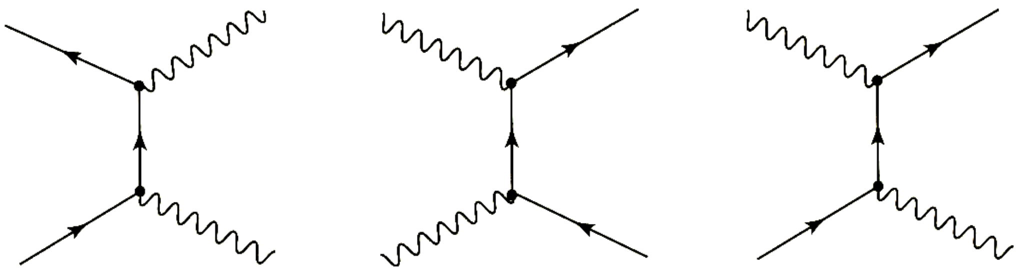
Αυτό που πρέπει να παρατηρηθεί στο πιο πάνω σχήμα είναι **ότι το ένα από τα δύο εισερχόμενα ηλεκτρόνια φαίνεται να έχει φορά αντίθετη στον χρόνο**. Με το τρόπο αυτό στα διαγράμματα Feynman παριστάνονται τα αντισωματίδια. Το παραπάνω διάγραμμα λοιπόν παρουσιάζει την εξαΰλωση ενός ποζιτρονίου και ενός ηλεκτρονίου που εισέρχονται από αριστερά μετατρέπονται σε ένα φωτόνιο το οποίο με την σειρά του αποδίδει επίσης ένα ζεύγος ποζιτρονίου-ηλεκτρονίου. Ένα δεύτερο σημείο που θα πρέπει να διευκρινιστεί είναι ότι η περιστροφή των διαγραμμάτων Feynman αντιστοιχεί στην εφαρμογή της συμμετρίας διασταύρωσης όπου σε κάθε αντίδραση ή αποδιέγερση, τα σωματίδια μπορούν να αλλάξουν θέση από προϊόντα σε αντιδρώντα και αντίστροφα απλώς μετατρέποντας το σωματίδιο σε αντισωματίδιο ή αντίστροφα.

Κατά την προηγούμενη διαδικασία ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο αλληλεπιδρούν. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει από το διάγραμμα Feynman του σχήματος 4.



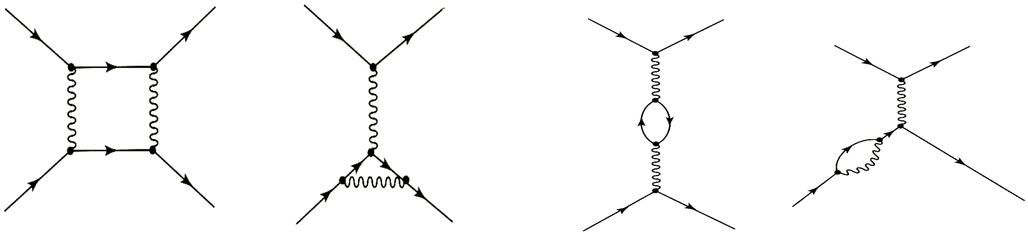
Σχήμα 4: Αλληλεπίδραση ποζιτρονίου-ηλεκτρονίου μέσω διαγραμμάτων Feynman. Στην κβαντική ηλεκτροδυναμική η σκέδαση αυτή απεικονίζει την έλξη ενός ηλεκτρονίου και ενός ποζιτρονίου και λέγεται σκέδαση Bhabha.

Αυτό το είδος της αλληλεπίδρασης είναι γνωστό με το όνομα “σκέδαση Bhabha” η οποία αφορά στην αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου και ενός ποζιτρονίου. Χρησιμοποιώντας μόνο δύο κόμβους όπως παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε και άλλες ήδη γνωστές φυσικές διαδικασίες Η/Μ αλληλεπίδρασης όπως για παράδειγμα η εξαΰλωση ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, η διαδικασία δίδυμης γέννησης και η σκέδαση Compton.



Σχήμα 5: Από αριστερά προς τα δεξιά: Εξαύλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, η διαδικασία δίδυμης γέννεσης και η σκέδαση Compton.

Με την χρήση περισσότερων των δύο κόμβων όπως για παράδειγμα χρησιμοποιώντας 4 κόμβους μπορούμε να αποδώσουμε την σκέδαση δύο ηλεκτρονίων με διαφορετικούς μηχανισμούς πολύ πιο πολύπλοκους.



Σχήμα 6: Αναπαράσταση διαγραμάτων Feynman διαφορετικών μηχανισμών αλληλεπίδρασης δύο ηλεκτρονίων με τέσσερις κόμβους.

Κατά την σκέδαση δύο ηλεκτρονίων ο απλούστερος μηχανισμός είναι αυτός όπου τα δύο ηλεκτρόνια ανταλλάσσουν ένα φωτόνιο και συνεχίζουν την πορεία τους. Οι παραπάνω μηχανισμοί αποτελούν πιο πολύπλοκες διαδικασίες που περιλαμβάνουν εικονικά ηλεκτρόνια και φωτόνια τα οποία δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθούν. Μόνο οι εξωτερικές γραμμές στα διαγράμματα Feynman αντιστοιχούν σε πραγματικά σωματίδια τα οποία μπορούμε να ανιχνεύσουμε και ως εκ τούτου χαρακτηρίζουν την διαδικασία. Τα εικονικά σωματίδια των πιο πάνω διαγραμμάτων δεν μπορούν να παρατηρηθούν και ως εκ τούτου δεν χρειάζεται να υπακούν την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Επίσης οι εσωτερικοί κόμβοι δεν χαρακτηρίζουν την διαδικασία ως προς την αρχική και τελική κατάσταση αλλά τον μηχανισμό με το οποίο έγινε η διαδικασία. Στο παραπάνω παράδειγμα λοιπόν η σκέδαση δύο ηλεκτρονίων μπορεί να γίνει είτε με τον απλούστατο μηχανισμό ανταλλαγής ενός φωτονίου ή με έναν από του πιο πάνω μηχανισμούς. Το παρατηρούμενο αποτέλεσμα είναι το ίδιο – η άπωση των ηλεκτρονίων. Βέβαια ο κάθε μηχανισμός έχει την δική του συνεισφορά σε κάθε φυσική διαδικασία και για αυτό τον λόγο τα διαγράμματα Feynman αποτελούν ένα πολύ όμορφο εργαλείο για την αναζήτηση και μελέτη μηχανισμών που μπορεί να συνεισφέρουν. Βέβαια μετά από αυτό προκύπτει ένα εύλογο ερώτημα. “Αν είναι έτσι τότε ο αριθμός των διαγραμμάτων Feynman τα οποία συνεισφέρουν στην κάθε διαδικασία είναι άπειρος διότι μπορούμε να κατασκευάσουμε όσο πολύπλοκα διαγράμματα θέλουμε. Πως είναι αυτό δυνατό;” Η απάντησή στο ερώτημα αυτό έρχεται μέσω της σταθεράς της λεπτής υφής. **Ο κάθε κόμβος στο διάγραμμα εισάγει έναν παράγοντα ίσο με $(1/137)^{1/2}$. Επομένως όσους περισσότερους κόμβους έχει ένα διάγραμμα τόσο μικρότερη είναι η συνεισφορά του αντίστοιχου μηχανισμού στην παρατηρούμενη φυσική διαδικασία.**

Πιο συγκεκριμένα, στο σημείο αυτό θα ήταν ιδιαιτέρως χρήσιμο να δούμε έστω ποιοτικά πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα διαγράμματα Feynman για τον υπολογισμό ενεργών διατομών γεγονότων σκέδασης ή ακόμα και ρυθμούς αποδιέγερσης. Πιο συγκεκριμένα από την στοιχειώδη θεωρία σκέδασης προκύπτει ότι η ενεργός διατομή για να συμβεί μία αντίδραση στοιχειωδών σωματιδίων είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου πλάτους M (amplitude). Για παράδειγμα η διαφορική ενεργός διατομή για την ελαστική σκέδαση δύο σωματιδίων a,b με ($m_b c^2$>>Ea) δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{\hbar}{8\pi m_b c}\right)^2 |M|^2$$

Πιο πολύπλοκες μαθηματικές εκφράσεις περιγράφουν διαφορετικά γεγονότα σκέδασης αλλά πάντα ο διαφορική ενεργός διατομή είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του πλάτους σκέδασης M. Ομοίως για την περίπτωση της αποδιέγερσης ενός σωματιδίου σε δύο θυγατρικά σωματίδια σύμφωνα με τον χρυσό κανόνα Fermi ο ρυθμός των αποδιεγέρσεων περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{S|\vec{p}|}{8\pi\hbar m_1^2 c}|M|^2$$

Βλέπουμε λοιπόν και εδώ ότι η πιθανότητα να γίνει μία αποδιέγερση είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου πλάτους M όπως ακριβώς και προηγουμένως.
Κάθε κόμβος όμως ενός διαγράμματος Feynman αποδίδει έναν παράγοντα

$$\sqrt{\alpha}$$

στο πλάτος M. Δηλαδή με άλλα λόγια:

$$M \propto \sqrt{\alpha} \times \sqrt{\alpha} \ldots \times \sqrt{\alpha}$$

ή

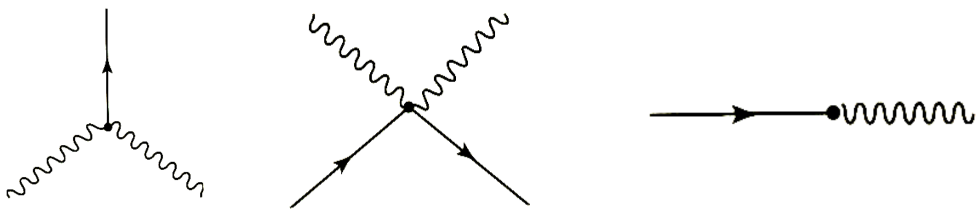
$$M \propto \left(\sqrt{\alpha}\right)^n$$

όπου ο παράγοντας √α πολλαπλασιάζεται τόσες φορές όσος είναι ο αριθμός των κόμβων (n) του διαγράμματος Feynman που περιγράφει την φυσική διαδικασία.

Προκειμένου να συνοψίσουμε ορισμένα από τα χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων Feynman που είδαμε μέχρι τώρα:

- Η οριζόντια διεύθυνση συμβολίζει τον χρόνο
- Η κάθετη κατεύθυνση δεν αντιστοιχεί σε κάποια φυσική ποσότητα
- Διατήρηση της ενέργειας και της ορμής σε κάθε αλληλεπίδραση
- Οι γραμμές που εισέρχονται και εξέρχονται παριστάνουν πραγματικά σωματίδια
- Οι γραμμές στα ενδιάμεσα στάδια παριστάνουν εικονικά σωματίδια
- Στην περίπτωση των Η/Μ αλληλεπιδράσεων ο κάθε κόμβος συνεισφέρει έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα ανάλογο του √α (α=1/137) στον υπολογισμό του πλάτους σκέδασης ή αποδιέγερσης.
- Η ενεργός διατομή ή η πιθανότητα αποδιέγερσης είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του πλάτους $|M|^2$

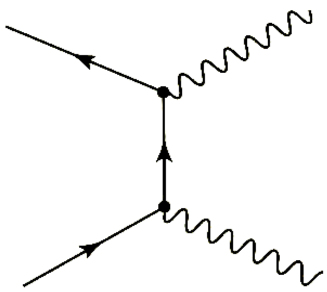
Πριν κλείσουμε την παρουσίαση των διαγραμμάτων Feynman για την Η/Μ αλληλεπίδραση θα πρέπει να αναφερθούν κάποια παραδείγματα κόμβων που προφανώς **δεν είναι σωστά**:



Σχήμα 7: Παραδείγματα μη επιτρεπτών κόμβων της η/μ αλληλεπίδρασης.

Παραδείγματα

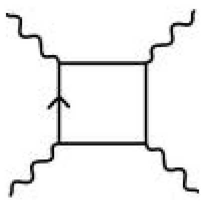
1)Το απλούστερο διάγραμμα εξαΰλωσης ενός ποζιτρονίου με ένα ηλεκτρόνιο είναι το εξής:



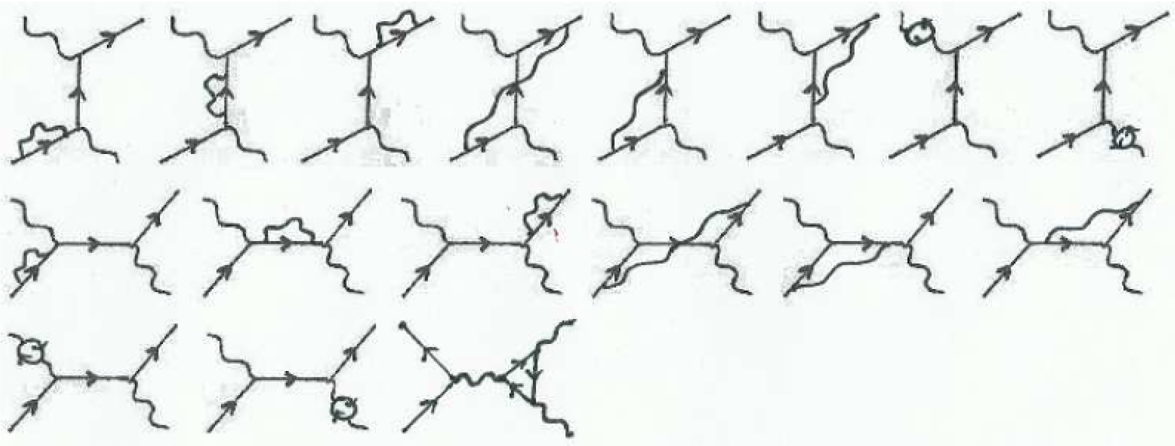
Να δείξετε ότι η εξαΰλωση με την εκπομπή μόνο ενός φωτονίου είναι αδύνατη:

Αυτό συμβαίνει διότι στο σύστημα κέντρου μάζας η αρχική ορμή είναι μηδέν για ένα σύστημα ποζιτρονίου ηλεκτρονίου. Αν δημιουργηθεί μόνο ένα φωτόνιο τότε η ολική ορμή δεν μπορεί να είναι μηδέν μετά την εξαΰλωση και ως εκ τούτου έχουμε παραβίαση της αρχής διατήρησης της ορμής.

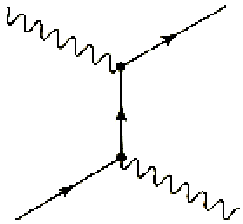
2) Σχεδιάστε το απλούστερο διάγραμμα Feynman που παριστάνει την σκέδαση Delbruck γ+γ->γ+γ

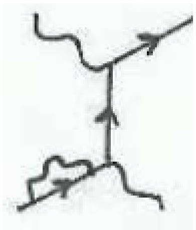


3) Σχεδιάστε όλα τα πιθανά διαγράμματα 4ης τάξης που παριστάνουν την σκέδαση Comtpon



4) Προσδιορίστε τον λόγο των ενεργών διατομών των φυσικών διεργασιών που περιγράφονται από τα πιο κάτω διαγράμματα Feynman

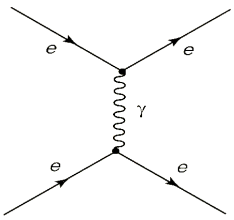


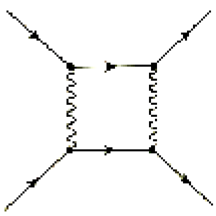


$$\frac{|M1|^2}{|M2|^2}=\frac{(\sqrt{a}\times\sqrt{a})^2}{(\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a})^2}=\frac{1}{(\sqrt{a}\times\sqrt{a})^2}=\frac{1}{a^2}=137^2=18769$$

Επομένως ο μηχανισμός του πρώτου διαγράμματος αν και περιγράφει το ίδιο φυσικό φαινόμενο είναι περίπου 20000 φορές πιο πιθανός από τον μηχανισμό του δεύτερου διαγράμματος!!

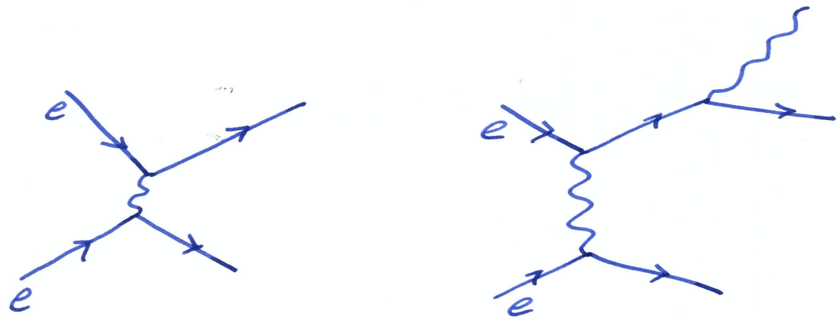
Το ίδιο ισχύει και για την σκέδαση ee όπου μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα:





Και εδώ, ο υπολογισμός του λόγου των ενεργών διατομών είναι ακριβώς ίδιος.

5) Να υπολογιστεί ο λόγος των ενεργών διατομών για τα δύο πιο κάτω διαγράμματα Feynman



$$\frac{|M1|^2}{|M2|^2}=\frac{(\sqrt{a}\times\sqrt{a})^2}{(\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a})^2}=\frac{1}{(\sqrt{a})^2}=\frac{1}{a}=137$$