Διάλεξη 11-12: Ασκήσεις στην Πυρηνική Φυσική

1) Υπολογισμός ενέργειας σύνδεσης ανά νουκλεόνιο για ^{56}Fe από τον πίνακα ατομικών μαζών και σύμφωνα με το πρότυπο της υγρής σταγόνας.
(Ατομικές μάζες: M(^{56}F)=55.934939, M(H)=1.007825, M(n)=1.008665)

Λύση:

$$Eb = C_1 \cdot A - C_2 \cdot A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

C1=15.7 MeV, C2=17.8 MeV, C3=0.71 MeV, C4=23.6 MeV, C5=34 MeV

- $C_5 \cdot \frac{1}{A^{3/4}}$ για N και Z περιττούς

+ $C_5 \cdot \frac{1}{A^{3/4}}$ για N και Z άρτιους

=0 για A περιττό

Από το πρότυπο της υγρής σταγόνας έχουμε:

$$Eb = 15.7 \cdot 56 - 17.8 \cdot 56^{2/3} - 0.71 \frac{26(26-1)}{56^{1/3}} - 26.6 \cdot \frac{(56-2 \cdot 26)^2}{56} + 34/56^{3/4}$$

$$Eb = 492.2\, MeV \Rightarrow Eb/A = 8.8\, MeV$$

Από τις δεδομένες ατομικές μάζες:

$$Eb = 26 \cdot M(p) + 30 \cdot M(n) - M(^{56}F)$$

$$Eb = (26 \cdot 1.007825 + 30 \cdot 1.008665 - 55.934939) \cdot 931.5\, MeV$$

$$Eb = 0.528 \cdot 931.5\, MeV = 492.3\, MeV \Rightarrow Eb/A = 8.8\, MeV$$

Τα αποτελέσματα είναι ταυτόσημα. Εκπληκτική συμφωνία μεταξύ προτύπου και πειραματικών αποτελεσμάτων.

2) Υπολογισμός της ηλεκτροστατικής ενέργειας σε MeV για δύο πυρήνες όταν τα κέντρα τους απέχουν απόσταση ίση με άθροισμα των πυρηνικών τους ακτίνων. ^{1}H-^{1}H και ^{197}Au-^{197}Au

Λύση:

$$R_H = 1.2\, fm$$

$$R_{Au} = 1.2 \cdot 197^{1/3} = 6.98\, fm$$

$$E = k\,\frac{Z^2 \cdot e^2}{r}$$

$$E_H = k\,\frac{e^2}{2\mathrm{R}_H} \qquad E_{Au} = k\,\frac{79^2 \cdot e^2}{2\mathrm{R}_{Au}}$$

Η σταθερά της λεπτής υφής:

$$\alpha = \frac{k\,e^2}{\hbar c}$$

$$1/\alpha = 137$$

Η σταθερά του Planck

$$\hbar \cdot c = 197.3\, MeV\, fm$$

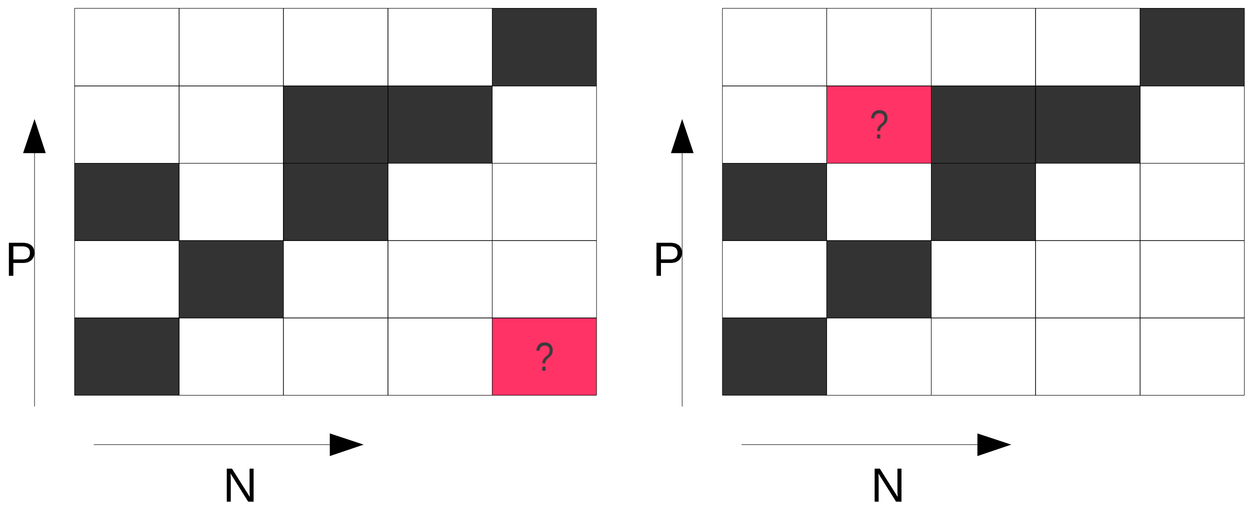
Το γινόμενο ke^2 σε πιο βολικές μονάδες:

$$k \cdot e^2 = \hbar \cdot c \cdot a = \frac{197.3\,(MeV\, fm)}{137}$$

$$E_H = \frac{197.3}{137 \cdot 2 \cdot 1.2} = 0.6\, MeV \qquad E_{Au} = \frac{79^2\, 197.3}{137 \cdot 2 \cdot 6.98} = 643.8\, MeV$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει την τεράστια διαφορά στην ενέργεια που πρέπει να προσφέρουμε στα δυο αυτά συστήματα προκειμένου να “δούμε” την επίδραση της ισχυρής αλληλεπίδρασης.

3) Τι είδους αποδιέγερση έχουμε για τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

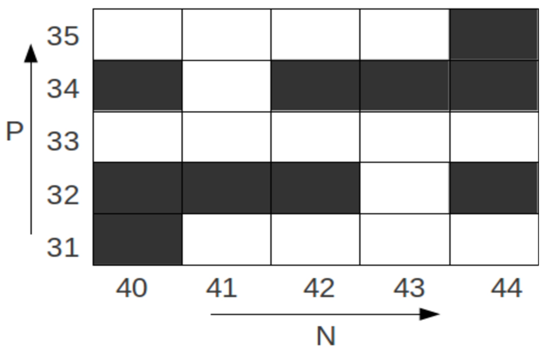


α) β^-
β) β^+ ή EC

4) Πολύ συχνά μετά από μία αποδιέγερση α έχουμε μία αποδιέγερση β. Όταν συμβαίνει αυτό συνήθως παρατηρείται αποδιέγερση β-. Για ποιο λόγο?

Όπως μπορεί κανείς να δει από τον πίνακα των νουκλιδίων η αποδιέγερση α είναι χαρακτηριστική των βαρέων πυρήνων οι οποίοι ως γνωστό παρουσιάζουν πλεόνασμα νετρονίων. Ο θυγατρικός πυρήνας που προκύπτει είναι ελαφρύτερος κατά 4 μονάδες μάζας αλλά εξακολουθεί να έχει πλεόνασμα νετρονίων. Επομένως αν είναι και αυτός ασταθής είναι πολύ πιθανό να έχουμε ένα σταθερότερο πυρηνικό σύστημα όταν ένα από τα πλεονάζοντα νετρόνια μετατραπεί σε πρωτόνιο. Δηλαδή περιμένουμε να έχουμε μια αποδιέγερση β^-.

5) Το αρσενικό (As, Z=33) έχει μόνο ένα σταθερό ισότοπο. Που είναι η πιο πιθανή του θέση στο πιο κάτω τμήμα του πίνακα των νουκλιδίων.



Εφόσον έχει μόνο ένα σταθερό ισότοπο τότε περιμένουμε να έχει άρτιο αριθμό νετρονίων. Στο παραπάνω σχήμα τρεις πιθανές θέσεις είναι N=40,42, 44. Από αυτές η N=42 είναι η πιθανότερη δεδομένου ότι βρίσκεται σε κεντρικότερη θέση της κοιλάδας σταθερότητας.

6) Με βάση το διπλανό σχήμα να υπολογιστεί το σπιν των πιο κάτω ισοτόπων στην βασική κατάσταση: ^{17}O, ^{17}F, ^{41}Ca.

Πρόκειται για πυρήνες που βρίσκονται στην άμεση γειτονιά διπλά μαγικών πυρήνων. Επομένως περιμένουμε το πρότυπο των φλοιών να ισχύει. Το O-17 έχει μόνο ένα νετρόνιο έξω από N=8 κλειστό φλοιό. Επομένως περιμένουμε να έχει σπιν 5/2. Το ίδιο ισχύει και για το F-17 μόνο που εδώ έχουμε 9 πρωτόνια δηλαδή ένα πρωτόνιο επιπλέον των 8 που αποτελούν έναν κλειστό φλοιό. Για τον ίδιο ακριβώς λόγο όπως και για το O-17 περιμένουμε σπιν 5/2.
Το Ca-41 πρόκειται επίσης για έναν πυρήνα με μόλις ένα επιπλέον νετρόνιο από τον διπλά μαγικό πυρήνα Ca-40. Επομένως περιμένουμε σπιν 7/2.

7) Ποιο είναι το σπιν των πυρήνων με N-άρτιο και Z-άρτιο

Είναι 0 διότι νουκλεόνια που καταλαμβάνουν την ίδια ενεργειακή στάθμη δημιουργούν περισσότερο δέσμιες καταστάσεις όταν έχουν τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς αλλά αντίθετα σπιν.
Σύμφωνα με το πρότυπο των φλοιών τα νουκλεόνια καταλαμβάνουν δεδομένες κβαντικές καταστάσεις του πυρήνα. Επιπλέον λόγω της αρχής του Pauli η κάθε κβαντική κατάσταση μπορεί να καταλαμβάνεται μόνο από ένα νουκλεόνιο (φερμιόνιο). Επομένως για την κάθε κβαντική κατάσταση ένα νουκλεόνιο θα έχει σπιν άνω και το άλλο αναγκαστικά κάτω. Η ίδια αρχή μεταφράζεται ενεργειακά μέσω μιας επιπλέον ενέργειας σύνδεσης η οποία εξασφαλίζει τη ζεύξη των νουκλονίων με αντίθετα σπιν στο ίδιο τροχιακό.

8) Κατά την σκέδαση Rutherford βρέθηκε ότι έστω σε μικρό ποσοστό ορισμένα σωματίδια α σκεδάζονται σε γωνία 180° από πυρήνες χρυσούς (Z=79). Αυτό σημαίνει ότι σε κάποιο σημείο της τροχιάς τους η κινητική ενέργεια των σωματιδίων αυτών μηδενίζεται. Αυτό ονομάζεται σημείο εγγύτερης προσέγγισης. Για σωματίδια α με κινητική ενέργεια KE=4 MeV ποια είναι αυτή η ελάχιστη απόσταση πρόσέγγισης;

$$\frac{1}{2}mu^2 = k\frac{(ze)(Ze)}{d} \Rightarrow KE = k\frac{(ze)(Ze)}{d}$$

$$d - \frac{e^2 Zz}{4\pi\varepsilon_0 KE} \Rightarrow \hbar c\,\frac{e^2 Zz}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c\, KE}$$

$$d = 197.3\,MeV\,\frac{fm\cdot 1}{137}\,\frac{2\cdot 79}{4\,MeV} = 57\,fm$$

9) Κατά την αποδιέγερση α πιο μέρος της διαθέσιμης ενέργειας Q μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του θυγατρικού πυρήνα.

$$A\Delta E: Q = K_a + K_d = \frac{p_a^2}{2\mathrm{m}_a} + \frac{p_d^2}{2\mathrm{m}_d}$$

$$A\Delta O: p_a = p_d$$

$$\frac{p_d^2}{2\mathrm{m}_d}\left(1+\frac{m_d}{m_a}\right) = Q \Rightarrow K_d = \frac{Q}{\left(1+\frac{m_d}{m_a}\right)}$$

$$K_d = \frac{m_a}{m_a + m_d}\cdot Q$$

10) Να υπολογιστεί η ενέργεια κατωφλίου για την περίπτωση μιας ενδόθερμης (Q<0) πυρηνικής αντίδρασης X(a,b)Y ως συνάρτηση των μαζών M_X, M_a και της τιμής Q.

Προκειμένου να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί θεωρούμε ότι η αντίδραση “προχωρά” μέσω της διαμόρφωσης ενός σύνθετου πυρήνα (Mc =MX+Ma)

$$A\Delta E: K_a + Q = K_C$$

$$A\Delta O: p_a = p_C$$

$$\frac{p_a^2}{2\mathrm{m}_a} + Q = \frac{p_C^2}{2\mathrm{m}_C} \Rightarrow \frac{p_a^2}{2\mathrm{m}_a}\left(1-\frac{m_a}{m_C}\right) = -Q \Rightarrow K_a = \frac{-Q\cdot m_C}{m_C - m_a} \Rightarrow K_a = \frac{-Q\cdot\left(m_X + m_a\right)}{m_X}$$

11) Να βρεθεί η εκλυόμενη ενέργεια στην αντίδραση σχάσης:

$$n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3\mathrm{n}$$

(M(n)= 1.008665 u, M(^{235}U)=235.0439u, M(^{141}Ba)=140.9139u, M(^{92}Kr)=91.8973u)

$$Q = M(n) + M\left({}^{235}U\right) - 3M(n) - M\left({}^{141}Ba\right) - M\left({}^{92}Kr\right)$$

$$Q = \left(235.0439 - 140.9139 - 91.8973 - 2\cdot 1.008665\right)\cdot 931.5\,MeV = 200.6\,MeV$$

12) Υπολογισμός ενέργειας διάσπασης για τον ^{14}C
[M(^{14}C)=14.00324u, M(^{14}N)=14.00307u]

$$^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + \beta^{-} + \overline{\nu}_e$$

m=μάζα πυρήνα, M=μάζα ατόμου, me=μάζα ηλεκτρονίου

Q=m(^{14}C)-m(^{14}N)-me = M(^{14}C)-6me-M(^{14}N)+7me-me=M(^{14}C)-M(^{14}N)

Q= (14.00324-14.00307)x931.5 MeV= 158 keV

13) Υπολογισμός ενέργειας διάσπασης για το ^{13}N
[M(^{13}N)=13.00574u, M(^{13}C)=13.003354u]

$$^{13}_{7}N \rightarrow {}^{13}_{6}C + \beta^{+} + \nu_e$$

m=μάζα πυρήνα, M=μάζα ατόμου, me=μάζα ηλεκτρονίου

Q=m(13N)-m(13C)-me = M(13C)-7me-M(13C)+6me-me=
M(14C)-M(14N) -2 me

Q= (13.00574-13.003354)x931.5-2x0.511 MeV= 1.2 MeV

14) Το $^{7}_{4}Be$ αποδιεγείρεται σχηματίζοντας $^{7}_{3}Li$. Ποιος είναι ο μηχανισμός αποδιέγερσης και γιατί.

[M(^{7}Be)=7.016928u, M(^{7}Li)=7.016003u, me=0.511 MeV, u = 931.5 MeV/c^2]

Το ^{7}Be είναι ένα ασταθές ισότοπο πλούσιο σε πρωτόνια. Η γειτονικότερη σταθερή πυρηνική διάταξη μπορεί να προκύψει μέσω αποδιέγερσης β^+ η EC.

m=μάζα πυρήνα, M=μάζα ατόμου, me=μάζα ηλεκτρονίου

Q(EC) = m(^{7}Be)-m(^{7}Li) -Bn = M(^{7}Be)-4me +me-M(^{7}Li) + 3 me -Bn
Q(EC) ≈ (7.016928-7.016003) x 931.5 MeV = 0.86 MeV
Q(β^+) = 0.86 MeV – 2 x 0.511 MeV < 0

Επομένως η παραπάνω αποδιέγερση του ^{7}Be προς ^{7}Li γίνεται αποκλειστικά μέσω της σύλληψης νετρονίου δεδομένου ότι Q(β^+)<0. Η ενέργεια σύνδεσης Bn που δεν λάβαμε υπόψη είναι σίγουρα μικρότερη από 860 keV (της τάξης μερικών keV ακόμη και για εσωτερικά ηλεκτρόνια)!

15) Σε ένα πείραμα παρατηρείται ότι η προσπίπτουσα δέσμη νετρονίων απορροφάται ή σκεδάζεται σε ποσοστό 0.01% από έναν στόχο αλουμινίου (A=27) με πυκνότητα 2.7 gr/cm^3. Αν θεωρήσουμε ότι η ολική ενεργός διατομή αντίδρασης είναι 1.1 b ποιο είναι το

πάχος του στόχου;

$$n=\frac{2.7\left(gr/cm^{3}\right)\cdot N_{A}}{27\,gr}=6.02\cdot 10^{22}\left(1/cm^{3}\right)\left[\text{πυρήνες στόχου ανά μονάδα όγκου}\right]$$

$$l_{MFP}=\frac{1}{n\sigma}=\frac{1}{6.02\,10^{22}\left(1/cm^{3}\right)1.1\,10^{-24}\,cm^{2}}=15.1\,cm$$

$$\frac{N_{sc}}{N_{0}}=10^{-4}=1-e^{-\frac{T}{l_{MFP}}}\Rightarrow e^{-\frac{T}{15.1}}=1-10^{-4}$$

$$\frac{-T}{15.1}=\ln\left(1-10^{-4}\right)\Rightarrow T=-15.1\cdot\left(-1.0\cdot 10^{-4}\right)=1.51\,10^{-3}\,cm=15\,\mu m$$

16) Από την αντίδραση σχάσης ενός πυρήνα ^{235}U η οποία προκαλείται από θερμικό νετρόνιο προκύπτουν οι πυρήνες: ^{143}Ba (Z=56) και ^{90}Kr (Z=36). Υπολογίστε την δυναμική ενέργεια λόγω της άπωσης Coulomb αμέσως μετά τον σχηματισμό των πυρήνων. [θεωρήστε ότι οι πυρήνες εφάπτονται και είναι σφαιρικοί]

$$R\left({}^{143}Ba\right)=1.2\cdot 143^{1/3}\,fm=6.28\,fm$$

$$R\left({}^{90}Kr\right)=1.2\cdot 90^{1/3}\,fm=5.38\,fm$$

$$E=k\,\frac{Z_{1}\cdot Z_{2}\cdot e^{2}}{\left(R\left({}^{143}Ba\right)+R\left({}^{90}Kr\right)\right)}$$

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}$$

$$\hbar c=197.3\,MeV\,fm$$

$$a=\frac{e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}\hbar c}=\frac{1}{137}$$

$$E=k\,\frac{Z_{1}\cdot Z_{2}\cdot e^{2}}{\left(R\left({}^{143}Ba\right)+R\left({}^{90}Kr\right)\right)}$$

$$E=a\cdot\hbar c\,\frac{\left(Z_{1}\cdot Z_{2}\right)}{\left(R\left({}^{143}Ba\right)+R\left({}^{90}Kr\right)\right)}=\frac{1}{137}\,197.3\left(MeV\,fm\right)\frac{\left(56\cdot 36\right)}{\left(6.28+5.38\right)fm}=249\,MeV$$

Ένα λογικό αποτέλεσμα δεδομένου ότι τόση είναι περίπου η ενέργεια που απελευθερώνεται σε μια αντίδραση σχάσης

17) Υπολογίστε την ενέργεια που απελευθέρώνεται από την “κάυση” 1000 kgr υδρογόνου κατά τον κύκλο πρωτονίου-πρωτονίου:

Είδαμε στην θεωρία ότι ο κύκλος πρωτονίου πρωτονίου αφορά στις πιο κάτω αντιδράσεις:

$$ {}_1^1H + {}_1^1H \rightarrow {}_1^2H + \bar{e} + \nu $$
$$ {}_1^1H + {}_1^2H \rightarrow {}_2^3He + \gamma $$

$$ {}_1^1H + {}_2^3He \rightarrow {}_2^4He + \bar{e} + \nu $$
$$ ή $$
$$ {}_2^3He + {}_2^3He \rightarrow {}_2^4He + {}_1^1H + {}_1^1H $$

οι οποίες μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως εξής:

$$ 4\cdot p \rightarrow {}_2^4He + 2e^{+} + 2\nu_e , Q = 24.69\,MeV $$

Τα 4 πρωτόνια έχουν μάζα μόλις 4u = 4 x 1.66 10^{-27} kgr = 6.64 10^{-27} kgr

Αυτό σημαίνει ότι 1000 kgr υδρογόνου παράγουν ενέργεια:

$$ \frac{1000}{6.64\cdot 10^{-27}} 24.69\,MeV = 3.72\cdot 10^{30}\,MeV $$

Στο SI (J)

1eV = 1.6 10^{-19} J

οπότε το παραπάνω αποτέλεσμα γίνεται:

5.95 10^{17} J ενέργειας για κάθε τόνο υδρογόνου που καταναλώνεται.

18) Κατά τον βομβαρδισμό ενός λεπτού στόχου ^{7}Li με δευτέρια ενέργειας 4 MeV παράγονται 2 σωματίδια α με ενέργεια 13.2 MeV το κάθε ένα από αυτά. Υπολογίστε την τιμή Q της αντίδρασης χρησιμοποιώντας μόνο τα πιο πάνω δεδομένα [να μην χρησιμοποιηθούν πίνακες ατομικών μαζών].

$$ Q = 2\cdot K_a - K_d = (2\cdot 13.2 - 4)\,MeV = 22.4\,MeV $$

19) Ένας ραδιενεργός πυρήνας με σταθερά διάσπασης λ διασπάται στον θυγατρικό του πυρήνα. Να υπολογιστεί το πλήθος των θυγατρικών πυρήνων μετά από χρόνο t αν θεωρήσουμε ότι την χρονική στιγμή t=0 είχαμε N_0 πατρικούς πυρήνες και καθόλου θυγατρικούς.

Πλήθος πατρικών πυρήνων μετά από χρονικό διάστημα t:

$$N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}$$

Επομένως το πλήθος των θυγατρικών πυρήνων είναι:

$$N_\theta(t)=N_0-N_0\cdot e^{-\lambda t}=N_0\left(1-e^{-\lambda t}\right)$$